12.6 Symmetrische und alternierende Potenzen

äussere

Definition: Für jede natürliche Zahl r besteht eine *r-te symmetrische*, bzw. *alternierende*, *Potenz von V über K* aus einem K-Vektorraum $\tilde{V}$ und einer symmetrischen, bzw. alternierenden, multilinearen Abbildung $\kappa\colon V^r \to \tilde{V}$ mit der *universellen Eigenschaft:*

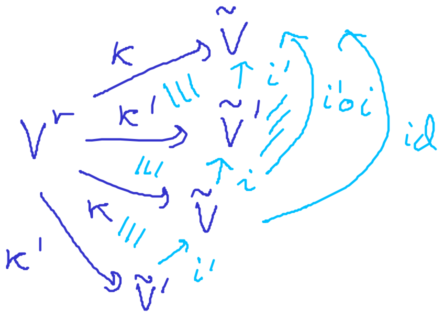
Für jeden K-Vektorraum W und jede symmetrische, bzw. alternierende, multilineare Abbildung $\varphi\colon V^r \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon \tilde{V} \to W$ mit $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\boxed{\begin{tikzcd} V^r \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\text{|||}"] & & W \\ & \tilde{V} \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}}$$

Proposition: Eine symmetrische, bzw. alternierende, Potenz ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, mit anderen Worten: Ist sowohl $(\tilde{V}, \kappa)$ wie $(\tilde{V}', \kappa')$ eine solche Potenz von V, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $i\colon \tilde{V} \xrightarrow{\sim} \tilde{V}'$ mit $i \circ \kappa = \kappa'$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\boxed{\begin{tikzcd} V^r \arrow[rr, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\text{|||}"] & & \tilde{V}' \\ & \tilde{V} \arrow[ur, dotted, "\cong", "i"'] & \end{tikzcd}}$$

Beweis:



Eindeutigkeit $\Rightarrow$ $i' \circ i = \mathrm{id}_{\tilde V}$.

$i \circ i' = \mathrm{id}_{\tilde V'}$,

qed.

Satz: Eine symmetrische, bzw. alternierende, Potenz existiert immer.

$\boxed{S^r V}$

Bew.: Idee:

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r] \arrow[dr] & S^r V \\ & V^{\otimes r} \arrow[u, "\exists! \text{ lin.}"'] \end{tikzcd}$$

$(v_1,\dots,v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r$

Sei $R := \{ v_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes v_{\sigma r} - v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mid \text{alle } v_1,\dots,v_r \in V; \text{ alle } \sigma \in S_r \}$.

Setze $\tilde{V} := (V^{\otimes r})/\langle R \rangle$ und $\kappa : V^r \to \tilde{V}$, $(v_1,\dots,v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r + \langle R \rangle$.

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r + \langle R \rangle = v_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes v_{\sigma r} + \langle R \rangle$$

Dann ist κ multilinear und symmetrisch.

Sei $\varphi : V^r \to W$ multilinear symmetrisch.

UE von $V^{\otimes r}$ liefert $\psi : V^{\otimes r} \to W$ linear mit $\psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = \varphi(v_1,\dots,v_r)$ für alle $v_i \in V$.

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] \arrow[ddr, "\kappa"'] & & W \\ & V^{\otimes r} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[d, "\text{Projektion}"] & \\ & \tilde{V} \arrow[uur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

φ symmetrisch $\Rightarrow$

$$\varphi(v_{\sigma 1},\dots,v_{\sigma r}) = \varphi(v_1,\dots,v_r)$$
$$\psi(v_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes v_{\sigma r}) = \psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)$$
$$\Rightarrow \psi(v_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes v_{\sigma r} - v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = 0.$$

UE des Quotientenvektorraums $\Rightarrow \exists! \, \bar{\varphi} : \tilde{V} \to W$ linear mit ...

Umgekehrt: Für jedes $\bar{\varphi}$ mit $\bar{\varphi} \circ \kappa = \varphi$ muss $V^{\otimes r} \to \tilde{V} \to W$ gleich ψ sein $\Rightarrow \bar{\varphi}$ eindeutig.

$\boxed{\Lambda^r V}$: $R := \{ v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \mid$ alle $v_i \in V$; $\exists\, i<j: v_i = v_j \}$. Rest analog. qed.

Konvention: Wir fixieren ein für alle Mal eine r-te symmetrische Potenz und bezeichnen den zugehörigen Vektorraum mit $S^r_K V$ oder $S^r V$, sowie die zugehörige symmetrische multilineare Abbildung mit

$$V^r \to S^r_K V,\ (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \cdots v_r.$$

\ldots \cdots

Wir fixieren ein für alle Mal eine r-te alternierende Potenz und bezeichnen den zugehörigen Vektorraum mit $\Lambda^r_K V$ oder $\Lambda^r V$, sowie die zugehörige alternierende multilineare Abbildung mit

$$V^r \to \Lambda^r_K V,\ (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_r.$$

\wedge

Rechenregeln: Die Multilinearität und Symmetrieeigenschaften dieser Abbildungen bedeuten gewisse Rechenregeln. Im Fall $r = 2$ sind die für alle $v, w, w' \in V$ und $\lambda \in K$:

$v \cdot (w + w') = v \cdot w + v \cdot w'$	$v \cdot \lambda w = \lambda(v \cdot w)$	$w \cdot v = v \cdot w$
$v \wedge (w + w') = v \wedge w + v \wedge w'$	$v \wedge \lambda w = \lambda(v \wedge w)$	$v \wedge v = 0$ $w \wedge v = -v \wedge w$

Spezialfall: Es gilt

$$V^{\otimes 0} = S^0 V = \Lambda^0 V = K \quad \text{und}$$
$$V^{\otimes 1} = S^1 V = \Lambda^1 V = V.$$

für alle $b_1, \ldots, b_r \in B$.

Satz: Sei B eine Basis von V, versehen mit einer Totalordnung $\preceq$ bzw. $\prec$. Dann bilden die Elemente

$$b_1 \cdots b_r \quad \text{für alle } b_i \in B \text{ mit } b_1 \preceq \ldots \preceq b_r \text{ eine Basis von } S_K^r V \text{, bzw.}$$
$$b_1 \wedge \ldots \wedge b_r \quad \text{für alle } b_i \in B \text{ mit } b_1 \prec \ldots \prec b_r \text{ eine Basis von } \Lambda_K^r V.$$

Insbesondere gilt

$$\dim_K S_K^r V = \binom{\dim_K(V) + r - 1}{r},$$

$$\dim_K \Lambda_K^r V = \binom{\dim_K(V)}{r}.$$

wie in § 12.2.

Bew.: Die $b_1 \otimes \ldots \otimes b_r$ für alle $b_1, \ldots, b_r \in B$ bilden eine Basis von $V^{\otimes r}$.

$\Rightarrow$ Die $b_1 \cdots b_r = b_{\sigma 1} \cdots b_{\sigma r}$ für alle $\sigma \in S_r$ erzeugen $S^r V$.

$\Rightarrow$ Die $b_1 \cdots b_r$ für alle $b_1, \ldots, b_r \in B$ mit $b_1 \preceq \ldots \preceq b_r$ erzeugen $S^r V$.

$R = \{ v_{\sigma 1} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma r} - v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \mid \text{alle } v_1, \ldots, v_r, \sigma \}$

$R' := \{ b_{\sigma 1} \otimes \ldots \otimes b_{\sigma r} - b_1 \otimes \ldots \otimes b_r \mid \text{alle } b_1, \ldots, b_r \in B, \sigma \}$

Die $b_1 \otimes \ldots \otimes b_r + \langle R' \rangle$ für alle $b_1, \ldots, b_r \in B$ mit $b_1 \preceq \ldots \preceq b_r$ bilden eine Basis von $V^{\otimes r} / \langle R' \rangle$.

Folge: Für alle $r > \dim_K(V)$ gilt $\Lambda_K^r V = 0$.

Für $r = \dim_K(V)$ gilt $\dim_K \Lambda_K^r V = 1$.

Schreibe $v_i = \sum_{b \in B}' \lambda_{ib} \cdot b$

$\Rightarrow \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_r = \sum_{b_1 \in B}' \cdots \sum_{b_r \in B}' \lambda_{1 b_1} \cdots \lambda_{r, b_r} \cdot b_1 \otimes \ldots \otimes b_r$

$$v_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes v_{\sigma r} = \Big(\sum_{b_{\sigma 1}}{}' \lambda_{\sigma 1, b_{\sigma 1}} b_{\sigma 1}\Big) \otimes \dots \otimes \Big(\sum_{b_{\sigma r}}{}' \lambda_{\sigma r, b_{\sigma r}} b_{\sigma r}\Big)$$

$$= \sum_{b_{\sigma 1}, \dots, b_{\sigma r} \in B}{}' \lambda_{\sigma 1, b_{\sigma 1}} \cdots \lambda_{\sigma r, b_{\sigma r}} \, b_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes b_{\sigma r}$$

$$\Rightarrow v_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes v_{\sigma r} - v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in \langle R' \rangle.$$

Also ist $\langle R \rangle = \langle R' \rangle$.

$\Lambda^r V$: $\quad R = \{ v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mid \exists i < j : v_i = v_j \}$

$$R' := \{ b_1 \otimes \dots \otimes b_r \mid \text{alle } b_i \in B,\ \exists i < j : b_i = b_j \}$$

$$\cup \{ b_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes b_{\sigma r} - \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_1 \otimes \dots \otimes b_r \mid \text{alle } b_i \in B,\ \sigma \in S_r,\ b_1 < \dots < b_r \}.$$

$\langle R' \rangle = \langle R \rangle$. analog zu oben.

qed.

Proposition: *(Adjunktionsformel)* Es existieren eindeutige Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_K(S^r_K V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^r_K(V,W), \quad f \mapsto \big((v_1,\ldots,v_r) \mapsto f(v_1\cdots v_r)\big),$$
$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^r_K V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r_K(V,W), \quad f \mapsto \big((v_1,\ldots,v_r) \mapsto f(v_1\wedge\ldots\wedge v_r)\big).$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & W \\ S^r V \arrow[ur, dashed, "\bar\varphi"'] & \\ \Lambda^r V & \end{tikzcd}$$

$(v_1,\ldots,v_r) \mapsto v_1\cdots v_r$, $v_1\wedge\ldots\wedge v_r$

Bijektivität = UE.

$$\left.\begin{array}{l}(\bar\varphi+\bar\psi)\circ\kappa = \bar\varphi\circ\kappa+\bar\psi\circ\kappa \\ (\lambda\cdot\bar\varphi)\circ\kappa = \lambda\cdot(\bar\varphi\circ\kappa)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{linear.}$$

qed.

Proposition: *(Funktorialität)* Zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to V'$ existieren eindeutige lineare Abbildungen

$$S^r f\colon \; S^r_K V \to S^r_K V' \quad \text{mit} \quad v_1\cdots v_r \mapsto f(v_1)\cdots f(v_r),$$
$$\Lambda^r f\colon \; \Lambda^r_K V \to \Lambda^r_K V' \quad \text{mit} \quad v_1\wedge\ldots\wedge v_r \mapsto f(v_1)\wedge\ldots\wedge f(v_r).$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "f\times\cdots\times f"] \arrow[d] \arrow[rr, bend right, "\text{multilinear alternierend}"'] & V'^r \arrow[r] & \Lambda^r V' \\ \Lambda^r V \arrow[urr, dashed] & & \end{tikzcd}$$

$\exists!$ nach der UE von $\Lambda^r V$.

$(v_1,\ldots,v_r) \mapsto f(v_1)\wedge\ldots\wedge f(v_r)$

$v_1\wedge\ldots\wedge v_r$

$S^r V$ analog.

qed.

Proposition: Für alle linearen Abbildungen $V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{g} V''$ gilt

(a) $S^r \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{S^r V}$ und $\Lambda^r \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{\Lambda^r V}$.

(b) Ist $f = 0$, so ist auch $S^r f = 0$ und $\Lambda^r f = 0$.

(c) $S^r g \circ S^r f = S^r(g \circ f)$ und $\Lambda^r g \circ \Lambda^r f = \Lambda^r(g \circ f)$.

(d) Ist f ein Isomorphismus mit Inversem g, so ist $S^r f$ bzw. $\Lambda^r f$ ein Isomorphismus mit Inversem $S^r g$ bzw. $\Lambda^r g$.

Bew.: (a) Eindeutigkeit in UE.

(b) " " "

(c)

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "f^r"] \arrow[d] & V'^r \arrow[r, "g^r"] \arrow[d] & V''^r \arrow[d] \\ \Lambda^r V \arrow[r, "\Lambda^r f"] \arrow[rr, bend right, "\Lambda^r g \circ \Lambda^r f"'] & \Lambda^r V' \arrow[r, "\Lambda^r g"] & \Lambda^r V'' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "(g\circ f)^r"] \arrow[d] & V''^r \arrow[d] \\ \Lambda^r V \arrow[r, "\Lambda^r(g\circ f)"] \arrow[r, bend right=50, "\Lambda^r g \circ \Lambda^r f"'] & \Lambda^r V'' \end{tikzcd}$$

UE in $\Lambda^r V$

$\Downarrow$

$\Lambda^r(g\circ f) = \Lambda^r g \circ \Lambda^r f$.

(d) $f \circ g = \mathrm{id} \Rightarrow \Lambda^r f \circ \Lambda^r g \overset{(c)}{=} \Lambda^r(f\circ g) = \Lambda^r(\mathrm{id}) \overset{(b)}{=} \mathrm{id}$

$g \circ f = \mathrm{id} \Rightarrow \Lambda^r g \circ \Lambda^r f = \text{- - - - - - - -} = \mathrm{id}$

qed.

Satz: Für jeden Endomorphismus f eines K-Vektorraums V der Dimension $n < \infty$ ist die Abbildung

$$\Lambda^n f \colon \Lambda^n_K V \to \Lambda^n_K V$$

Dimension $\binom{n}{n} = 1$.

gleich der Multiplikation mit $\det(f)$.

Bemerkung: Damit kann man die Determinante alternativ und basisfrei konstruieren.

Bew.: $(b_1, \ldots, b_n)$ geordnete Basis von V

$\Rightarrow \{b_1 \wedge \ldots \wedge b_n\}$ Basis von $\Lambda^n V$.

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot b_i \Rightarrow {}_B[f]_B = (a_{ij})_{ij}$$

$$\Rightarrow (\Lambda^n f)(b_1 \wedge \ldots \wedge b_n) = f(b_1) \wedge \ldots \wedge f(b_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \cdot \underbrace{b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n}}_{0 \text{ falls zwei Faktoren gleich}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma 1,1} \cdots a_{\sigma n,n} \cdot b_{\sigma 1} \wedge \ldots \wedge b_{\sigma n}$$

Sonst $(i_1, \ldots, i_n) = (\sigma 1, \ldots, \sigma n)$ für $\sigma \in S_n$.

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma 1,1} \cdots a_{\sigma n,n} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) \right) b_1 \wedge \ldots \wedge b_n.$$

$$= \det({}_B[f]_B) \cdot b_1 \wedge \ldots \wedge b_n = \det(f) \cdot b_1 \wedge \ldots \wedge b_n.$$

qed.